UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA LINEAL

1.- Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar su respuesta.

a) Sea P_3 = {espacio de los polinomios < 3} y el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ contenido en P_3 donde:

$p_1(x) = ax^2+bx-c$

$p_2(x) = dx^2 + ex +f$

$p_3(x) = gx -h$

Entonces el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente independiente. (Siendo: **a** la mayor cifra del año de su nacimiento, **b** la suma de cifras del día de su nacimiento, **c** la suma de cifras de su edad, **d** la mayor cifra de su código, **e** la menor cifra significativa de su código, **f** el número de su grupo, **g** un número primo menor que 10 y **h** la suma de cifras del mes de su nacimiento)

b) Si $|a+b| = |a-b|$ entonces $a\times(a\times(a\times(a\times b)) = -|a|^4 b$, siendo a, b vectores de R^3.

c) El conjunto M , es un sub espacio vectorial de R^4 , siendo:

$M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3-x_4 = 0\}$

2. Sea el triángulo ABC donde $C=(11,5,-6)$

$L_1: \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+8}{7}=\dfrac{z-6}{-2}$ es bisectriz interior del ángulo A $L_2: \dfrac{x+11}{9}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-15}{-8}$ es mediana trazada desde B al lado $\overline{AC}$.

a) Halle los vértices del ΔABC

b) Halle el área de la región triangular ABC

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

3.- Sean las rectas:

$$L_1 : \frac{x+6}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$$

$$L_2 : x-3 = \frac{y}{2} \quad ; Z = 2 \quad y$$

el plano $P: 3X + 2Y - 5Z = -10.$ $Si \quad A \in L_1; \quad B \in L_2 \quad y \quad C \in P.$ Determinar A, B y C de modo que el área del triángulo ABC sea mínima.

4.-a) En el espacio vectorial real de las matrices 2x2, con elementos reales ,si tenemos el subespacio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det er \min ar \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, talquela \ matriz \ \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \in U.$$

b) Determina las coordenadas del vector v = (m, n, p) respecto de la bases B_1, que se podría obtener a partir del siguiente conjunto de los vectores {(2, 1, 0), (1,0,-2),(1, 0, 3),(1,-1,1)} y B_2 a partir del conjunto { (1,2,3)} de R^3. (Siendo **m** la suma de cifras del mes de su nacimiento, **n** la suma de cifras de su edad y **p** la mayor cifra del año de su nacimiento)

EL PROFESOR

UNI 270221

EXAMEN FINAL: LINEAL

ESTUDIANTE: ELIZABETH VANESSA TINTAYA LIZARRAGA
CÓDIGO: 20200213B
FIRMA:

1-6
2-5
3-3
4,5
4,5

1.- Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) P_3 = { espacio de los polinomios < 3 } y el conjunto { P_1, P_2, P_3 } contenido en P_3, donde:

$$p_1(x) = ax^2 + bx - c$$
$$p_2(x) = dx^2 + ex + f$$
$$p_3(x) = gx - h$$

Entonces el conjunto { p_1, p_2, p_3 } es L.I. (V)

POR DATO:

$a = 2$; $b = 4$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 1$;
$f = 5$; $g = 2$; $h = 2$

ENTONCES:

$$p_1(x) = 2x^2 + 4x - 10$$
$$p_2(x) = 3x^2 + x + 5$$
$$p_3(x) = 2x - 2$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -60 \neq 0$$

→ $R(A) = 3$, por lo tanto { p_1, p_2, p_3 } son L.I

∴ La proposición es verdadera

b.- Si $|a+b| = |a-b|$ entonces $(a \times (a \times (a \times (a \times b)))) = -|a|^4 b$, siendo a y b vectores de R^3. (F)

Se tiene: $(|a+b| = |a-b|)^2$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$$
$$4 a \cdot b = 0$$
$$\rightarrow \boxed{a \cdot b = 0}$$

$\rightarrow$ a y b son ortogonales.

Luego: $(a \times (a \times (a \times (a \times b))))$, donde $\text{I} = a \times (a \times b)$, $\text{II} = a \times \text{I}$, $\text{III} = a \times \text{II}$

Entonces: $\text{I} = a \times (a \times b) = \cancel{(a \cdot b)}^{0} a - (a \cdot a) b$

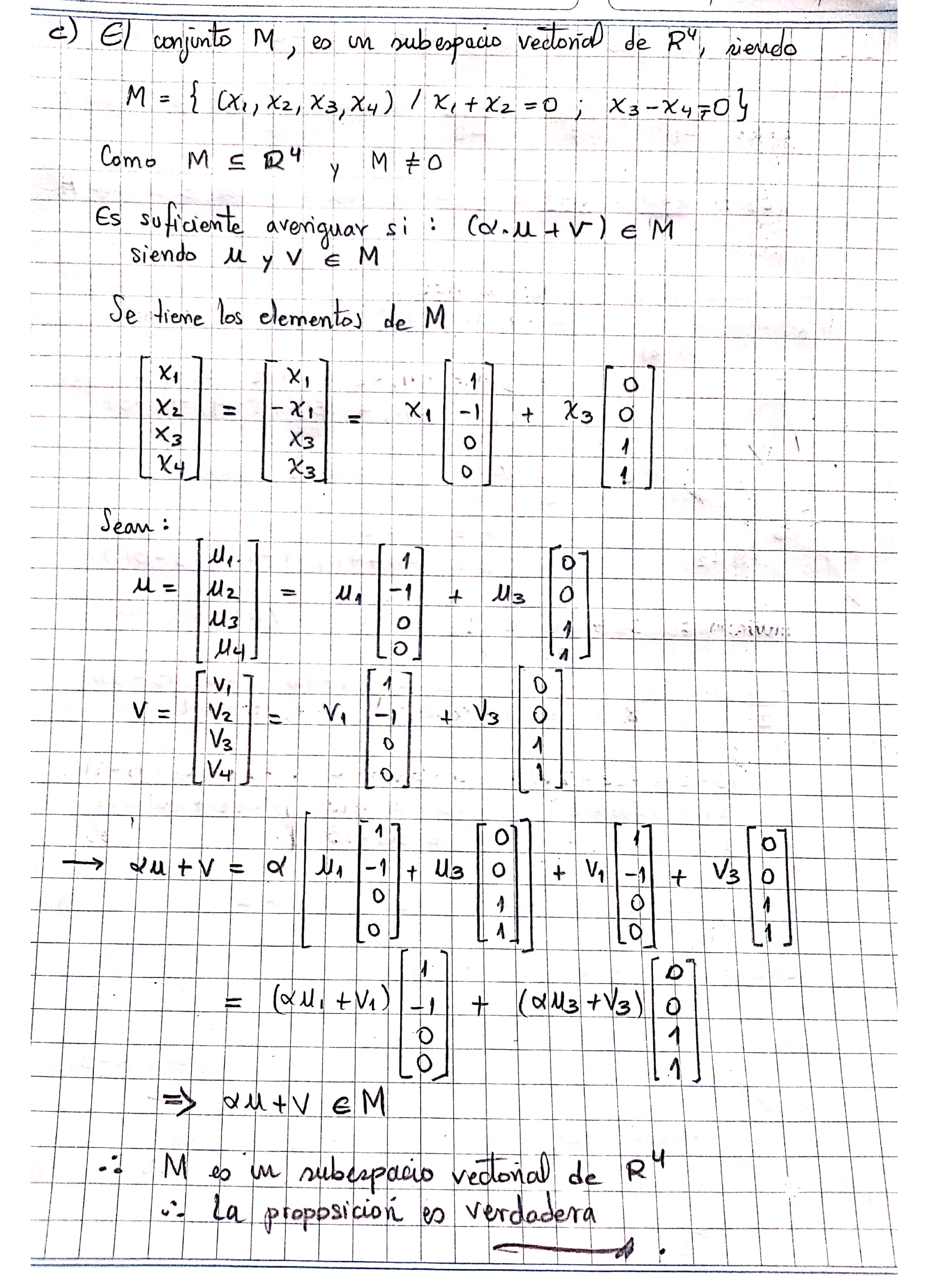
$$a \times (a \times b) = -(a \cdot a) b$$

$$\text{II} = a \times [-(a \cdot a) b] = -(a \cdot a)(a \times b)$$

$$\text{III} = a \times [-(a \cdot a)(a \times b)] = -(a \cdot a)[a \times (a \times b)]$$
$$= -(a \cdot a)[-(a \cdot a) b]$$
$$= -|a|^2 [-|a|^2 b]$$
$$\text{III} = |a|^4 b$$

Por tanto: $a \times (a \times (a \times (a \times b))) = |a|^4 b$

$\therefore$ La proposición es falsa



c) El conjunto M, es un subespacio vectorial de R^4, siendo

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 = 0 \ ; \ x_3 - x_4 = 0 \}$$

Como $M \subseteq R^4$ y $M \neq 0$

Es suficiente averiguar si: $(\alpha \cdot u + v) \in M$
siendo u y $v \in M$

Se tiene los elementos de M

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha u + v = \alpha \left[u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] + v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha u_1 + v_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (\alpha u_3 + v_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha u + v \in M$$

$\therefore$ M es un subespacio vectorial de R^4

$\therefore$ La proposición es verdadera

2.- Sea el triángulo ABC donde $C = (11, 5, -6)$

$L_1: \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z-6}{-2}$ es bisectriz interior del ángulo A.

$L_2: \dfrac{x+11}{9} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-15}{-8}$ es mediana desde B al lado $\overline{AC}$

a) Halle los vértices del Δ ABC.

$L_1: (4, -8, 6) + t(-1, 7, -2)$
$L_2: (-11, 4, 15) + r(9, -1, -8)$

$A \in L_1$ y $B \in L_2$, entonces:

$A = (4-t;\ -8+7t;\ 6-2t)$
$B = (-11+9r;\ 4-r;\ 15-8r)$

PUNTO MEDIO DE $\overline{AC} \in L_2$:

$$\frac{A+C}{2} = \left(\frac{15-t}{2};\ \frac{-3+7t}{2};\ -t\right) = (-11+9w;\ 4-w;\ 15-8w)$$

$15-t = -22+18w$	$15-8w = -t$	$-3+7t = 8-2w$
$37 = 18w+t$	$15+t = 8w$	$7t+2w = 11$
	$t = 8w-15$	

$37 = 18w + 8w - 15$
$52 = 26w \longrightarrow w = 2$ y $t = 1$

Entonces: $A = (3, -1, 4)$

Luego:

$V_1 = (-1, 7, -2)$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-14+9r;\ 5-r;\ 11-8r)$

$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (8;\ 6;\ -10)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AC} \cdot V_1}{|AC||V_1|} = \frac{\vec{AB} \cdot V_1}{|AB||V_1|}$$

$$\rightarrow \frac{\vec{AC} \cdot V_1}{|AC|} = \frac{\vec{AB} \cdot V_1}{|AB|}$$

$$\frac{(-8 + 42 + 20)}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 10^2}} = \frac{(14 - 9r + 35 - 7r - 22 + 16r)}{|AB|}$$

$$\frac{54}{10\sqrt{2}} = \frac{27}{|AB|}$$

$$\rightarrow |AB| = 5\sqrt{2}$$

$$(9r - 14)^2 + (5 - r)^2 + (11 - 8r)^2 = 50$$

$$\rightarrow r = 2 \lor r = 1$$

Reemplazando : $B = (7;\ 2;\ -1) \lor$
$B = (-2;\ 3;\ 7)$

Por las condiciónes : $B = (-2, 3, 7)$

Por tanto : $A = (3, -1, 4)$
$B = (-2, 3, 7)$
$C = (11, 5, -6)$

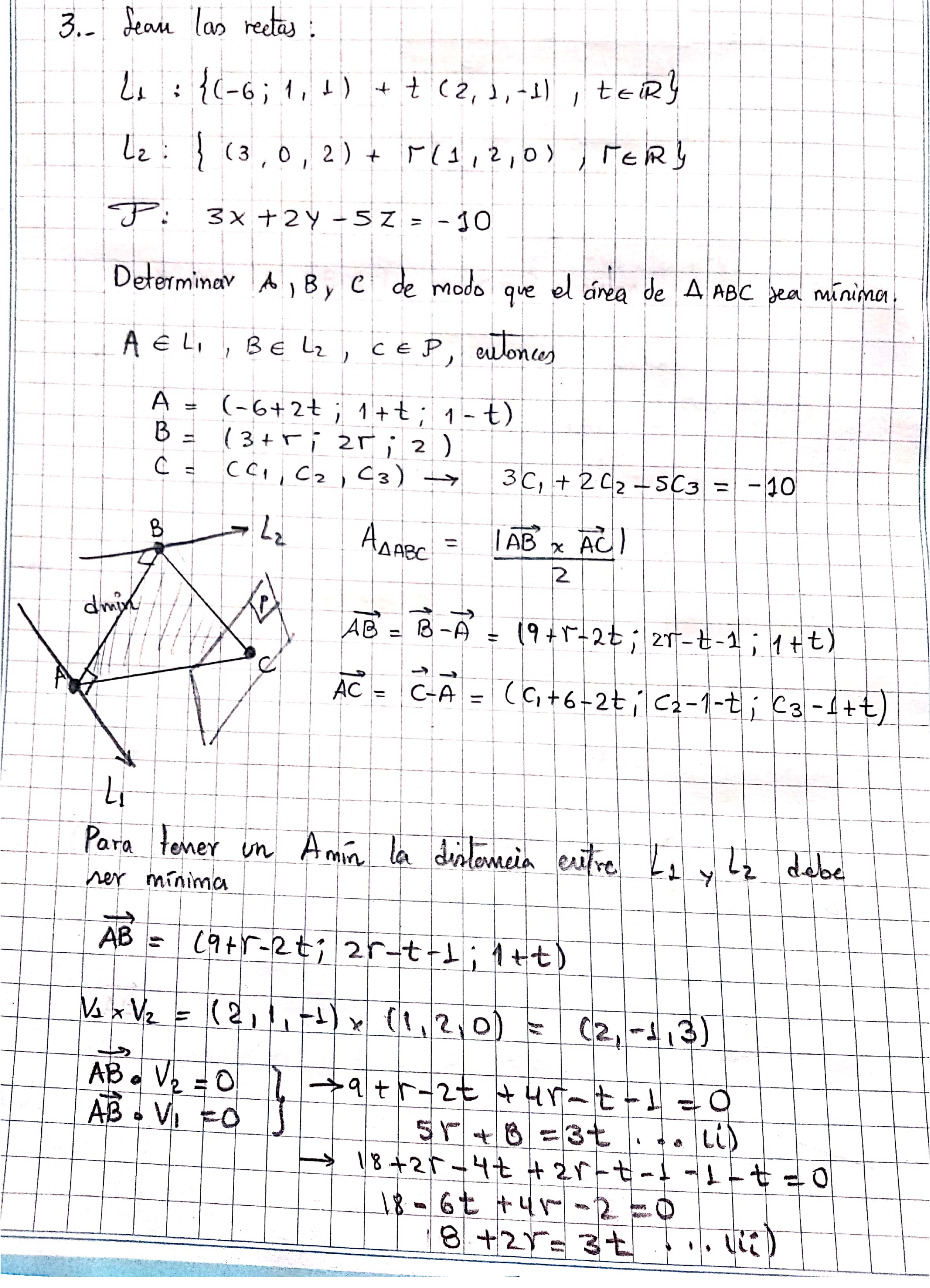
b) Hálle el área del triángulo ΔABC :

$$A_{\Delta ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

$\vec{AB} = (-5;\ 4;\ 3)$ y $\vec{AC} = (8;\ 6;\ -10)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-58;\ -26;\ -62)$

$$A_{\Delta ABC} = 3\sqrt{219}\ u^2$$



3.- Sean las rectas:

$L_1 : \{(-6; 1, 1) + t(2, 1, -1) \, , \, t \in \mathbb{R}\}$

$L_2 : \{(3, 0, 2) + r(1, 2, 0) \, , \, r \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{P} : 3x + 2y - 5z = -10$

Determinar A, B y C de modo que el área de ΔABC sea mínima.

$A \in L_1$, $B \in L_2$, $C \in \mathcal{P}$, entonces

$A = (-6+2t ; 1+t ; 1-t)$
$B = (3+r ; 2r ; 2)$
$C = (C_1, C_2, C_3) \longrightarrow 3C_1 + 2C_2 - 5C_3 = -10$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (9+r-2t ; 2r-t-1 ; 1+t)$

$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (C_1+6-2t ; C_2-1-t ; C_3-1+t)$

Para tener un A mín la distancia entre L_1 y L_2 debe ser mínima

$\vec{AB} = (9+r-2t ; 2r-t-1 ; 1+t)$

$V_1 \times V_2 = (2, 1, -1) \times (1, 2, 0) = (2, -1, 3)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} \cdot V_2 = 0 \\ \vec{AB} \cdot V_1 = 0 \end{array}\right\}$ $\rightarrow 9 + r - 2t + 4r - t - 1 = 0$

$5r + 8 = 3t \ \ldots \ i)$

$\rightarrow 18 + 2r - 4t + 2r - t - 1 - 1 - t = 0$

$18 - 6t + 4r - 2 = 0$

$8 + 2r = 3t \ \ldots \ ii)$

Escaneado con CamScanner

De (i) y (ii) : $r = 0$ y $t = \frac{8}{3}$

Entonces

$$A = \left(-6 + \frac{16}{3} ; 1 + \frac{8}{3} ; 1 - \frac{8}{3}\right)$$

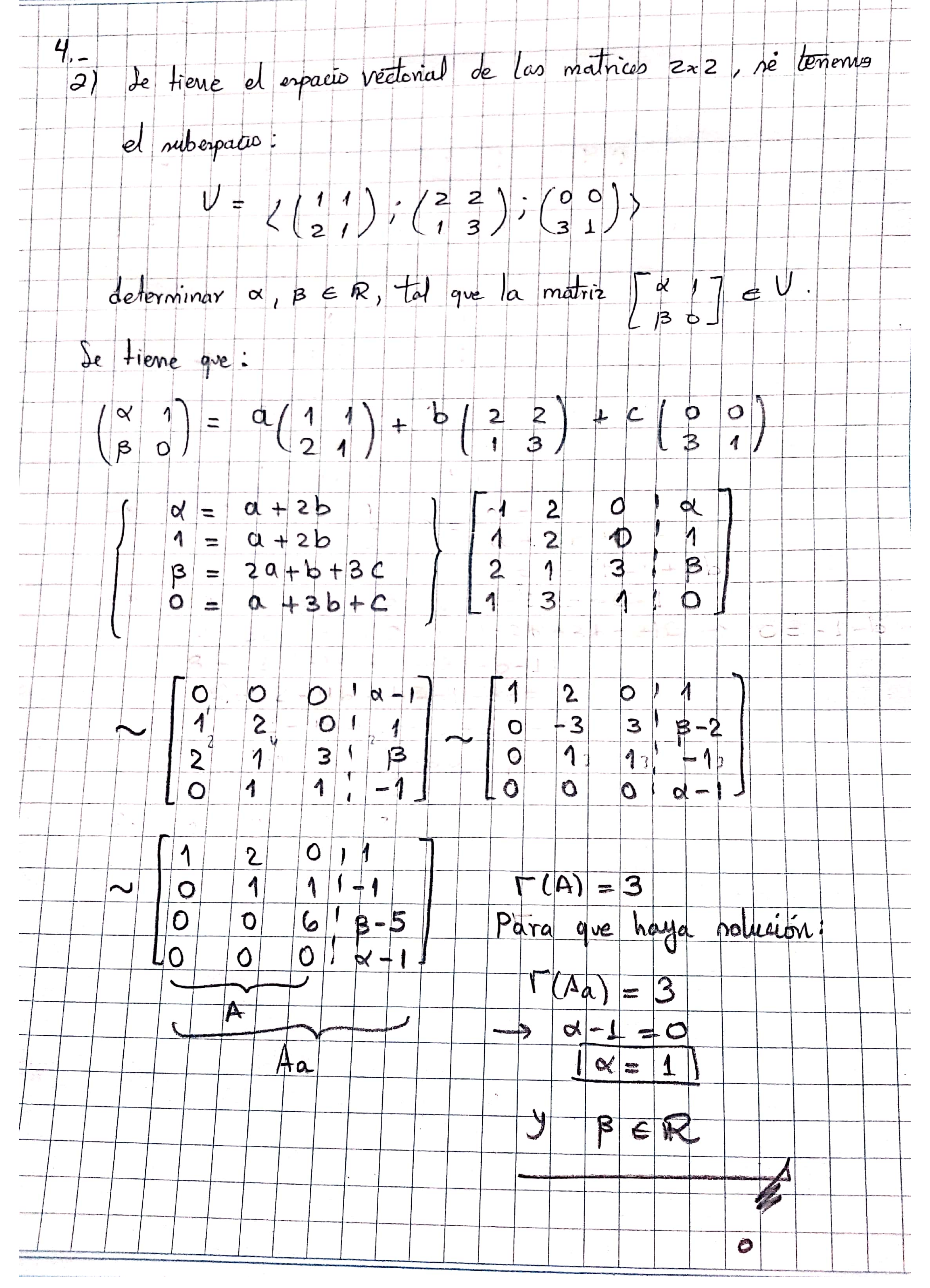
$$A = \left(\frac{-2}{3} ; \frac{11}{3} ; \frac{-5}{3}\right)$$

$$B = (3, 0, 2)$$

Para hallar C :

$C \in \mathcal{P}$: $3C_1 + 2C_2 - 5C_3 = -10$

Las $d(\mathcal{P}, L_1)$ y $d(\mathcal{P}, L_2)$ deben ser mínimas.



4.-

a) Se tiene el espacio vectorial de las matrices 2x2, si tenemos el subespacio:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

determinar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tal que la matriz $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \in V$.

Se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = a + 2b \\ 1 = a + 2b \\ \beta = 2a + b + 3c \\ 0 = a + 3b + c \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \beta \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & \beta-2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right]$$

$$\sim \underbrace{\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \beta-5 \\ \alpha-1 \end{array}\right.\right]}_{Aa}$$

$r(A) = 3$

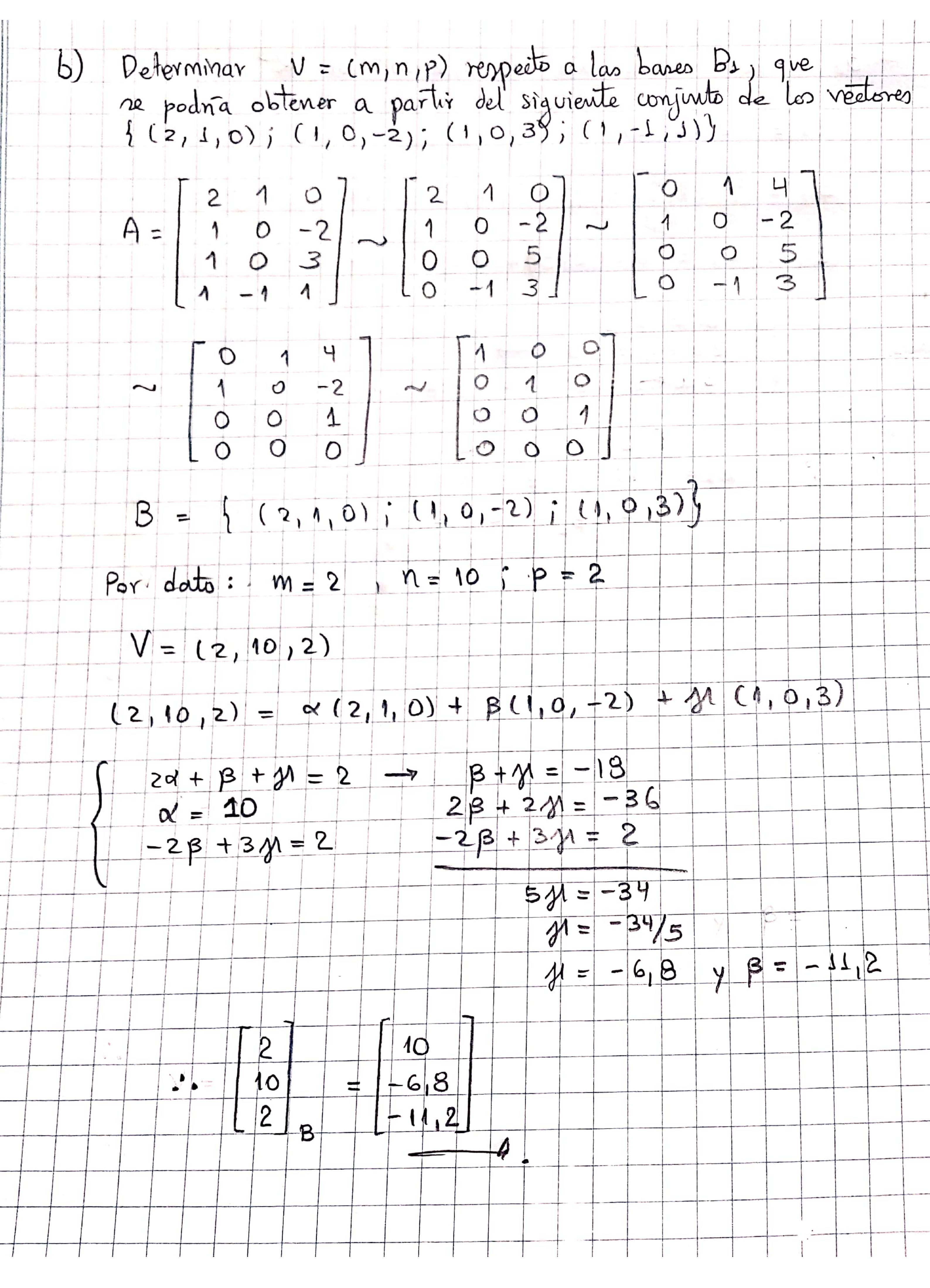
Para que haya solución:

$r(Aa) = 3$

$\rightarrow \alpha - 1 = 0$

$\boxed{\alpha = 1}$

y $\beta \in \mathbb{R}$



b) Determinar $V = (m, n, p)$ respecto a las bases B_1, que se podría obtener a partir del siguiente conjunto de los vectores $\{(2,1,0);\ (1,0,-2);\ (1,0,3);\ (1,-1,1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(2,1,0);\ (1,0,-2);\ (1,0,3)\}$$

Por dato: $m = 2$, $n = 10$; $p = 2$

$$V = (2, 10, 2)$$

$$(2,10,2) = \alpha(2,1,0) + \beta(1,0,-2) + \gamma(1,0,3)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha = 10 \\ -2\beta + 3\gamma = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \beta + \gamma &= -18 \\ 2\beta + 2\gamma &= -36 \\ -2\beta + 3\gamma &= 2 \end{aligned}$$

$$5\gamma = -34$$

$$\gamma = -34/5$$

$$\gamma = -6{,}8 \quad y \quad \beta = -11{,}2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 10 \\ -6{,}8 \\ -11{,}2 \end{bmatrix}$$

A.

→ B_2 a partir del conjunto $\{(1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$

$V = (2, 10, 2)$

$B_2 = \{(1,2,3);\ (0,1,0);\ (0,0,1)\}$

$(2,10,2) = a(1,2,3) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 10 \rightarrow b = 6 \\ 3a + c = 2 \rightarrow c = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$